Exercices et problèmes

27 Soit le nombre complexe $z = e^{i\theta} - i$ avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. On désigne par M et M′ les points images respectives de z et $\bar{z}$ dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer l'affixe du point N pour que OMNM′ soit un losange.

2. a. Montrer que $z = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$.

b. Mettre $\frac{\bar{z}}{z}$ sous la forme exponentielle.

c. En déduire la valeur de θ pour que OMNM′ soit un carré.

d. Construire le carré OMNM′ pour la valeur de θ trouvée.

28 Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A le point d'affixe 1.

On considère l'application f de $P \setminus \{A\}$ dans P qui, à tout point M de $P \setminus \{A\}$ d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z′ telle que $z' = \frac{\bar{z} + 3}{z - 1}$.

1. Soit B le point d'affixe $1 - i$.

a. Déterminer l'affixe du point B′ image de B par f.

b. Placer les points B et B′ dans le plan P.

2. Soit C le point d'affixe $1 + 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

a. Calculer AC.

b. Déterminer $(\vec{u}, \overrightarrow{AC})$.

c. En déduire la construction du point C.

d. Montrer que $f(C) = C$.

3. a. Calculer $(\bar{z} - 1)(z' - 1)$.

b. En déduire que $AM.AM' = 4$.

c. Déterminer l'image par f du cercle de centre A et de rayon 2.

29 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit $a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

On désigne par A_0 le point d'affixe $z_0 = 6 + 6i$ et pour tout entier naturel n, on désigne par A_n le point d'affixe $z_n = a^n z_0$.

1. Ecrire z_1 et a^2 sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2. Exprimer z_3 et z_7 à l'aide de z_1 et a^2.

3. En déduire l'écriture exponentielle de z_3 et z_7.

4. Placer les points A_0, A_1, A_3 et A_7.

30 Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point M′ d'affixe $z' = \frac{1}{\bar{z}}$.

1. Déterminer l'ensemble des points fixes de f.

2. Démontrer que pour tout point M distinct de O, les points O, M et M′ sont alignés et que $OM \cdot OM' = 1$.

3. a. Montrer que les points A, B et C d'affixes respectives 4, $2 + 2i$, $2 - 2i$ appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre le point I d'affixe 2 et de rayon 2.

b. Calculer les affixes des points A′, B′ et C′ images par f des points A, B et C.

Montrer que les points A′, B′ et C′ appartiennent à une même droite dont on donnera une équation.

4. a. Montrer pour tout nombre complexe non nul z, $|z - 2| = 2$, si et seulement si, $\left|\frac{1}{2} - z'\right| = |z'|$.

b. En déduire l'image par f du cercle $\mathscr{C}$.

31 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A, le point d'affixe $z_A = 1$, et par $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1.

I. Soit F le point d'affixe 2, B le point d'affixe $z_B = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et E le point d'affixe $(1 + z_B^2)$.

1.a. Montrer que le point B appartient à $\mathscr{C}$.

b. Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB})$. Placer le point B.

2. a. Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes $(z_B - z_A)$ et $(z_E - z_A)$.

b. En déduire que les points A, B et E sont alignés.

3. Placer le point E.